岡多様体と楕円性

日下部 佑太　(京大理)*

概　要

ある複素多様体が岡多様体であるとは, 任意の Stein 多様体からの正則写像の近似・拡張問題が連続解を持てば正則な解も持つことをいう (岡の原理の成立). 一方で楕円性とは, 小林, Eisenman, Brody らによる双曲性と真逆の性質であり, 具体的には複素 Euclid 空間からの支配的な正則写像が「たくさん」存在することを意味する. 本稿では, これらの概念が徐々に交わっていき, 最終的にはある意味で同一のものになる様子を概観する.

1. はじめに

本稿の目的は, タイトルを構成する「岡多様体」と「楕円性」の関係を Gromov の予想と問題を通して理解することである. ここではまず, これらの概念の意味を説明する.

平たく言えば, ある複素多様体が**岡多様体**であるとは, 任意の Stein 多様体からの正則写像の近似・拡張問題が連続解を持てば, それをホモトピーによって正則な解に変形できることをいう (cf. 定義 4). この概念は, 岡の第 III 論文 [30] で発見された岡の原理に起源を持つ. 現代的には, 岡の原理は複素解析におけるホモトピー原理と解釈される. より厳密に述べると, 岡の原理とは Stein 多様体 X (cf. 定義 1) に対して X 上のあるクラスの解析的対象全体と位相的対象全体を考えたときに包含射

$$\{\, X \text{ 上の解析的対象} \,\} \hookrightarrow \{\, X \text{ 上の位相的対象} \,\}$$

が弱同値になるという命題もしくはそのような現象と言うことができる. 実際に岡多様体の定義は, Stein 多様体を定義域とする正則写像の空間から連続写像の空間への包含射が弱ホモトピー同値になるという岡の原理の成立と同値である (cf. 注意 5). 岡が論文 [30] で発見した岡の原理は, Stein 多様体上の正則直線束全体から (位相的) 複素直線束全体への包含射が同型類全体の間の全単射を導くという意味で弱同値になるものである. この結果は Grauert [16, 17] により任意階数のベクトル束へと一般化されたが, 現代的にこの岡の原理は複素等質多様体が岡であることの帰結と見ることができる.

一方で, **楕円性**とは双曲性と真逆の性質を意味するべきであり, 複素幾何学においては小林, Eisenman, Brody らによる種々の双曲性と真逆の性質を指す. これらの双曲性は総じて複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^N$ からの非退化正則写像の非存在性と見ることができるため, 複素多様体 Y の楕円性とは非退化正則写像 $\mathbb{C}^N \to Y$ が「たくさん」存在することと定めるのが妥当である (cf. 第 3 節). 例えば, 複素 Euclid 空間で被覆される複素射影空間や複素 Euclid 空間を普遍被覆にもつ複素トーラスには複素 Euclid 空間からの非退化正則写像がたくさん存在し, ある種の楕円性を持っている. このような意味での楕円性という言葉は, 1986 年に Gromov [18] によって初めて使われたようである.

本研究は科研費 (課題番号:18J20418) の助成を受けたものである.
2020 Mathematics Subject Classification: Primary 32Q56; Secondary 32E10, 32E30
キーワード：岡多様体, Stein 多様体, 楕円性
* 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学大学院理学研究科数学教室
e-mail: kusakabe@math.kyoto-u.ac.jp
web: https://kusakabe.github.io/

一見するだけではそこまで深い関係があると分からない「岡多様体」と「楕円性」であるが, Gromov の岡の原理 (定理 16) などを通してこれらの概念は徐々に交わっていき, Gromov 予想 (予想 17) の解決により最終的にはある意味で同一のものになる (定理 20). 次節からは本稿で必要となる定義や性質を紹介し, 岡多様体と楕円性の関係について論じていく. より詳しい歴史や岡多様体の理論に関しては, 岡多様体を導入した Forstnerič による解説書 [10] やサーベイ [9, 11], そしてホモトピー論の観点などから岡多様体論を研究している Lárusson による講義録 [26] を参照されたい.

2. Stein 多様体と岡多様体

この節では Stein 多様体の基本的事項を簡単に復習し, 岡多様体の厳密な定義を与える.

定義 1 (Stein [33], Grauert [14])**.** 複素多様体 X が **Stein 多様体**であるとは, 以下の 2 つの条件を満たすことである:

1. (正則分離性) 任意の相異なる 2 点 $x, x' \in X$ に対し正則関数 $f \in \mathcal{O}(X)$ で $f(x) \neq f(x')$ となるものが存在する.

2. (正則凸性) 任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対し, その正則凸包

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(X)} = \left\{ x \in X : |f(x)| \leq \sup_K |f| \ \forall f \in \mathcal{O}(X) \right\}$$

もコンパクトである.

次のように, Stein 多様体は開 Riemann 面の一般次元版, 正則領域の多様体版, アファイン代数多様体の解析版と少なくとも 3 つのクラスの自然な一般化と見ることができる.

例 2. (1) (Behnke–Stein [2]) 連結 Riemann 面に対して, Stein であることと開 Riemann 面であることは同値である.
(2) (Cartan–Thullen [6]) 複素 Euclid 空間内の領域に対して, Stein であることと正則領域であることは同値である.
(3) 定義より, 複素 Euclid 空間内の閉複素部分多様体は Stein である (実は逆も成立する [31]). 特に任意のアファイン代数多様体は Stein である.

Stein 多様体では以下のように一変数複素解析における Runge の近似定理や Weierstrass の拡張定理と同様の定理が成り立つ. これらは Stein 多様体の性質の一端に過ぎないが, Stein 多様体が正則関数の最も自然な定義域であることを主張するには十分である.

定理 3 (cf. [10, Theorem 2.8.4])**.** X を Stein 多様体とする.
(1) (Oka–Weil の近似定理) 任意のコンパクト正則凸集合 $K \subset X$ (すなわち $K = \widehat{K}_{\mathcal{O}(X)}$) に対し, 任意の正則関数 $f_0 \in \mathcal{O}(K)$ は正則関数 $f_1 \in \mathcal{O}(X)$ で K 上一様近似される.
(2) (Oka–Cartan の拡張定理) 任意の閉複素部分多様体 $X' \subset X$ と任意の正則関数 $f_0 \in \mathcal{O}(X')$ に対し, 正則関数 $f_1 \in \mathcal{O}(X)$ で $f_1|_{X'} = f_0$ となるものが存在する.

これらは Stein 多様体の性質であるが, 視点を変えれば値域 $\mathbb{C}$ の性質とも見ることができる. つまり, Stein 多様体からの正則写像の近似・拡張問題が解けるのは値域が $\mathbb{C}$ であったためだと考えるのである. 定義域が Stein であっても, 例えば値域を $\mathbb{D}$ にすると Liouville の定理よりこの問題は常に解けるわけではないことが分かる. また, 値域が

位相的に自明な $\mathbb{C}$ の場合には問題にならなかったが, 明らかな必要条件として連続解は存在せねばならない. そのような必要条件のもとで近似・拡張問題が常に解ける値域として岡多様体は定義され, Stein 多様体と双対的な正則写像の最も自然な値域である.

定義 4. 複素多様体 Y が**岡多様体**であるとは, 以下が成り立つことをいう: 任意の Stein 多様体 X と任意のコンパクト正則凸集合 $K \subset X$, 任意の閉複素部分多様体 $X' \subset X$, 任意の連続写像 $f_0 : X \to Y$ で K の近傍及び X' で正則であるものに対し, ホモトピー $f_t : X \to Y$ $(t \in [0,1])$ で全ての $t \in [0,1]$ に対して次の条件を満たすものが存在する:

1. f_t は K の近傍で正則で f_0 を K 上一様に近似する.
2. $f_t|_{X'} = f_0|_{X'}$.
3. $f_1 : X \to Y$ は X 全体で正則.

また, f_0 が X' の近傍で正則ならば, ホモトピー f_t は X' に沿って f_0 に与えられた有限位数で接するように取ることができる.

注意 5. 実は, 上の定義においてコンパクト空間にパラメータをもつ連続写像に対する近似・拡張定理の成立を考えても同値な定義になる (cf. [10, §5.15], [24]). このことから, 正則写像の空間から一部で正則な連続写像の空間への包含射が弱ホモトピー同値になることも岡性と同値である. 特別な場合として, 任意の Stein 多様体 X と任意の岡多様体 Y に対し, 正則写像の空間から連続写像の空間への包含射 $\mathcal{O}(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{C}(X,Y)$ は弱ホモトピー同値である (ホモトピー同値になるかどうかは未解決. cf. [27]).

岡多様体の厳密な定義を与えたものの, このままでは複素 Euclid 空間を除いてどのような複素多様体が岡であるか確かめるのは至難の業である. 岡多様体をより単純な近似定理の成立のみで特徴付けられないかと Gromov [19, §3.4.(D)] が問題にし, それを肯定的に解いたのが Forstnerič [8] である.

定理 6 (Forstnerič の岡の原理 [8])**.** 複素多様体 Y が岡多様体であるためには, 任意のコンパクト凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ の近傍から Y への正則写像を正則写像 $\mathbb{C}^n \to Y$ で K 上一様近似できることが必要十分である.

実は Forstnerič はこの定理の相対版, すなわち上の近似条件を満たすファイバーをもつ正則ファイバー束の相対的な岡性も証明している.

この岡の原理を用いることで, 複素等質多様体が岡であることを簡単に確かめることができる. ここで複素多様体 Y が複素等質多様体であるとは, ある複素 Lie 群から Y への正則かつ推移的な作用が存在することをいう.

系 7 (Grauert [15])**.** 任意の複素等質多様体は岡である.

証明. 一般の複素等質多様体の場合も同様なので, 複素 Lie 群の場合の証明のみ述べる. G を複素 Lie 群とし, $K \subset \mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ をコンパクト凸集合, $f : K \to G$ を正則写像とする. この K は原点 $0 \in \mathbb{C}^n$ を含むとしてよい. ホモトピー $f_t : K \to G$ $(t \in [0,1])$ を $f_t(z) = f(tz)$ と定義すると, $f_1 = f$ であり f_0 は定値写像である. 従って f_0 は $\mathbb{C}^n \to G$ に正則に拡張される. 指数写像 $\exp : \mathrm{T}_1 G \to G$ は原点で局所的に双正則であるため, 十分大きな $N \in \mathbb{N}$ に対して正則写像 $\varphi_j : K \to \mathrm{T}_1 G$ $(j = 1, \ldots, N)$ で $f_{j/N} = \exp \varphi_j \cdot f_{(j-1)/N}$ $(j = 1, \ldots, N)$ となるものが存在する. Oka–Weil の近似定理

(定理3) より, 正則写像 $\widetilde{\varphi}_j : \mathbb{C}^n \to \mathrm{T}_1 G$ $(j = 1, \ldots, N)$ で φ_j を K 上一様に近似するものが存在する. このとき,

$$\tilde{f} = \exp \varphi_N \cdots \exp \varphi_1 \cdot f_0 : \mathbb{C}^n \to G$$

は f を K 上一様に近似する. □

このことから例えば, 連結Riemann面が岡であることと双曲的でないこと (すなわち普遍被覆が $\mathbb{D}$ でないこと) の同値性が従う. また相対的なForstnerič の岡の原理は, 次のように既知の岡多様体から新たに岡多様体を作る操作も与える.

系 8 (cf. [10, Theorem 5.6.5])**.** 岡多様体をファイバーにもつ正則ファイバー束 $E \to B$ に対し, E が岡であることと B が岡であることは同値である. 特に, (不分岐) 正則被覆写像 $E \to B$ に対し, E と B の岡性は同値である.

以上のように, Forstnerič による岡多様体の特徴付けは新たな例の発見に有用である. しかし, これでもまだ近似問題を解く難しさが残っており, 岡になるためのより扱いやすい幾何学的十分条件が欲しくなる. その役割を果たすのが次節で扱う楕円性である.

3. 支配的スプレーと楕円性

第1節で述べたように, 複素幾何学における楕円性とは複素Euclid空間からの非退化正則写像が「たくさん」存在するという性質を指すのであった. まず, 基本的な楕円性として次の2つの性質が考えられる.

定義 9. 複素多様体 Y が**支配可能** (resp. **強支配可能**) であるとは, ある点 $y \in Y$ (resp. 任意の点 $y \in Y$) に対して正則写像 $s : \mathbb{C}^N \to Y$ で $s(0) = y$ かつ原点 $0 \in \mathbb{C}^N$ で沈め込みであるものが存在することをいう.

例 10. (1) 任意の岡多様体は強支配可能である. これを見るためには, 各点に対してそれを像に含む開球からの正則写像を複素Euclid空間からの正則写像で近似すればよい.
(2) 支配可能だが強支配可能でない複素多様体が存在する (cf. [13, Example 5]).

より強い楕円性を考えるために, Gromov が導入した支配的スプレーの定義を与える. これは簡単に言うと, 複素Euclid空間からの非退化正則写像の正則族のことである.

定義 11. X, Y を複素多様体とする.
(1) 正則写像 $f : X \to Y$ 上の**スプレー**とは, 正則ベクトル束 $E \to X$ の全空間からの正則写像 $s : E \to Y$ で全ての $x \in X$ に対し, $s(0_x) = f(x)$ を満たすものである [1].
(2) 正則写像 $X \to Y$ 上のスプレー $s : E \to Y$ が**部分集合** $U \subset X$ **上で支配的**であるとは, 全ての $x \in U$ に対し $s|_{E_x} : E_x \cong \mathbb{C}^N \to Y$ が原点 $0_x \in E_x$ で沈め込みとなることをいう. $U = X$ の場合は, 単に**支配的**であるといわれる.

この概念を用いて, Gromov は次の2つの楕円性を導入した. ここで楕円的であるという性質を定義しているが, これは広い意味での楕円性の一例としての楕円性であることに注意しておく. 双曲性の一例である小林双曲性が, しばしば単に双曲性と呼ばれるようなものである. 混乱の恐れがある場合には, ここで定義するものを狭義の楕円性と述べることにする.

---

[1] ベクトル束 $E \to X$ と点 $x \in X$ に対して, E_x で x 上の E のファイバー, 0_x で E_x の原点を表す.

定義 12 (Gromov [18, 19])**.** Y を複素多様体とする.
(1) Y が**楕円的**であるとは, 恒等写像 id_Y の上に支配的スプレーが存在することをいう.
(2) Y が**条件** Ell_1 を満たすとは, 任意の Stein 多様体から Y への正則写像の上に支配的スプレーが存在することをいう.

注意 13. (1) 条件 Ell_1 を満たすならば, 明らかに強支配可能である (逆が成立するかどうかは未解決).
(2) 楕円的ならば条件 Ell_1 を満たす. これを確かめるために, $s : E \to Y$ を恒等写像 id_Y 上の支配的スプレー, X を Stein 多様体, $f : X \to Y$ を正則写像とし, f による正則ベクトル束 $E \to Y$ の引き戻しを考える:

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near end] & E \arrow[r, "s"] \arrow[d] & Y \\ X \arrow[r, "f"] & Y & \end{tikzcd}$$

このとき, 合成写像 $s \circ \tilde{f} : f^*E \to Y$ は f 上の支配的スプレーである.
(3) 特に, Stein 多様体が楕円的であることと条件 Ell_1 を満たすことは同値である.

以下では, Gromov が導入した楕円性をもつ複素多様体の例をいくつか見ていく.

例 14. (1) 任意の複素等質多様体 Y は楕円的である. 実際に G を正則かつ推移的に Y に作用する複素 Lie 群としたとき,

$$s : Y \times \mathrm{T}_1 G \to Y, \quad s(y, v) = \exp(v) \cdot y$$

は id_Y 上の支配的スプレーになる (系 7 の証明でも指数写像が用いられたことに注意).
(2) 接束 $\mathrm{T}Y$ を張る有限個の $\mathbb{C}$ 完備正則ベクトル場 $V_1, \cdots, V_N$ が存在するならば Y は楕円的である (このとき Y は**正則柔軟**であるという). これを確かめるには $\varphi_t^j \in \mathrm{Aut}(Y)$ $(t \in \mathbb{C})$ を V_j のフローとし, id_Y 上の支配的スプレー $s : Y \times \mathbb{C}^N \to Y$ を

$$s(y, t_1, \ldots, t_N) = \varphi_{t_1}^1 \circ \cdots \circ \varphi_{t_N}^N(y)$$

と定めればよい.
(3) 特に $A \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ を従順な閉複素部分多様体で余次元が 2 以上のものとすると, 補空間 $\mathbb{C}^n \setminus A$ は正則柔軟であり楕円的である (Rosay–Rudin [32, Theorem 4.5] の例より従順という条件は外すことができない). ここで $A \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ が**従順**であるとは, ある自己同型写像 $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}^n$ で $\varphi(A)$ の $\mathbb{P}^n \supset \mathbb{C}^n$ での閉包が無限遠超平面 $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{C}^n$ を含まないものが存在することをいう (例えばアファイン代数多様体や格子など). この場合は, A に制限すると固有になる射影 $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ が十分あり, これと $p(A)$ で消える正則関数 $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n-1})$, $p(v) = 0$ となるベクトル $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ から定まるベクトル場 $V = (f \circ p)v$ を $\mathrm{T}(\mathbb{C}^n \setminus A)$ を張るように有限個考えればよい.

上の例 (1) と系 7 を比較すると, 楕円性と岡多様体の間の関係が少しずつ見えてくる. 実は, 任意の岡多様体は楕円性の一つである条件 Ell_1 を満たす.

命題 15 (cf. [8, Corollary 8.8.7])**.** 任意の岡多様体は条件 Ell_1 を満たす.

証明ではまず Stein 多様体からの正則写像に対してそのグラフの近傍でファイバーに沿った正則ベクトル場を上手く取り, 例 14 (2) のようにフローを用いて「局所的な」支

配的スプレーを構成する．そして岡の原理 (定義 4) を用いて零切断における 1 階微分が一致するように大域的な支配的スプレーに拡張することで条件 Ell_1 が確かめられる．

命題 15 により岡多様体から楕円性への道が見つかった訳であるが, 実は逆方向の道も存在する．そもそも, Gromov による楕円性は複素幾何学的な文脈で導入されたのではない．Ell_1 が導入された [18] 及び (狭義の) 楕円性が導入された [19] のタイトルが示唆するようにこれらは岡の原理の文脈で導入され, 実際に次の岡の原理が示された．

定理 16 (Gromov の岡の原理 [19])**.** 任意の楕円的な複素多様体は岡である．

証明において, 支配的スプレーは (系 7 の証明と同じく) 近似問題を線形化するために用いられる．オリジナルの岡の原理 [30] の証明でも指数関数を用いて問題を線形化するというアイデアが用いられていたことに注意しておく．また Forstnerič の岡の原理 (定理 6) と同様, この岡の原理も相対的な場合にも示されている．すなわち, 楕円的な正則沈め込みが相対的な岡性を持つことが知られている．

以上により, 岡多様体と楕円性の間にそれぞれの方向の道があることが分かった．ここで自然と問題になるのがこれらの道が一方通行なのかどうかであり, 次節ではこの問題を扱う．

4. 岡多様体と楕円性の関係: Gromov の予想と問題

前節では, 岡性が条件 Ell_1 を導くこと, そして (狭義の) 楕円性が岡性を導くことを見た．これらの逆も成り立つかを問うのが, 次の Gromov の予想[2]と問題である．

予想 17 (cf. Gromov [19, §1.4.E″])**.** 複素多様体が条件 Ell_1 を満たすことと岡であることは同値である．

問題 18 (Gromov [19, Question 3.2.A″])**.** 任意の岡多様体は楕円的か．

これらを解決するために, [23] で新たに次の楕円性が導入された．

定義 19. 複素多様体 Y が**凸楕円的**であるとは, 任意のコンパクト凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) から Y への正則写像の上に支配的スプレーが存在することをいう．

条件 Ell_1 は凸楕円性を導くことに注意する．凸楕円性が岡性を導くことを示して Gromov の予想を肯定的に解決したのが, [23] における主結果のうちの一つである．

定理 20 ([23, Theorem 2.2])**.** 複素多様体が凸楕円的であることと岡であることは同値である．従って, 条件 Ell_1 と岡性も同値である．

この定理は初め, Forstnerič の岡の原理 (定理 6) を経由することで示された．その後, 相対的な凸楕円性が相対的な岡性を導くという定理 20 の相対版 (相対的 Gromov 予想の解決) が [24] で得られたが, そこでは Forstnerič の岡の原理は用いられていない．Forstnerič の岡の原理における近似条件や (狭義の) 楕円性は凸楕円性を直ちに導くため, この定理は Forstnerič と Gromov による岡の原理を統一する岡の原理にもなっている．

実は Gromov 問題は定理 20 の応用として解決される．それを見るために, まずは局所化原理と呼ばれる次の系を証明する．ここで複素多様体の Zariski 開集合とは, 補集合が (非特異とは限らない) 閉複素部分多様体になる部分集合のことである．

[2] Gromov が実際に予想したのは条件 Ell_1 がある近似定理を導くことであるが, Forstnerič の岡の原理 (定理 6) よりその主張は予想 17 と同値である．

系 21 ([23, Theorem 1.4])**.** 岡であるようなZariski開集合で被覆される複素多様体は岡である.

証明ではForstneričの岡の原理の変種[10, Theorem 8.6.1]から従う次の補題を用いる.

補題 22. Y を複素多様体, $U \subset Y$ を岡であるようなZariski開集合とする. このとき任意のStein多様体 X と任意の正則写像 $f : X \to Y$ に対して f 上のスプレー $X \times \mathbb{C}^N \to Y$ で $f^{-1}(U)$ の上で支配的なものが存在する.

系21の証明. Forstneričの岡の原理(定理6)から岡であるような2つのZariski開集合 U, V により $Y = U \cup V$ と被覆される場合を考えれば十分である. 任意のStein多様体 X と正則写像 $f : X \to Y$ に対して補題22を用いることで得られる $f^{-1}(U)$ の上で支配的な f 上のスプレー $s : X \times \mathbb{C}^N \to Y$ を考える. この s を f の代わりに, そして V を U の代わりに再び補題22を用いることで $s^{-1}(V)$ の上で支配的な s 上のスプレー $(X \times \mathbb{C}^N) \times \mathbb{C}^{N'} \to Y$ が得られる. これを $X \times \mathbb{C}^{N+N'} \to Y$ と見ると, $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ 全体で支配的なスプレーとなっており, Y が条件 Ell_1 を満たすことが確かめられた. □

この局所化原理は非特異トーリック多様体などの既知の岡性の単純な証明(cf. [23, §1])を与えるだけでなく, [23, §4.3]やWinkelmannの論文[34]などで新たな岡多様体の例の発見にも用いられている. (狭義の)楕円的でない岡多様体の例も局所化原理を用いて初めて発見された. その例の非楕円性を見るためには次の定理が必要となる.

定理 23 (Andrist–Shcherbina–Wold [1])**.** 次元が3以上であるStein多様体 X と集積点を無限に持つコンパクト正則凸集合 $K \subset X$ に対し, 補空間 $X \setminus K$ は楕円的でない.

これらの結果から次の非楕円的岡多様体が得られる. 非楕円性は上の定理によるが, [22]ではこの定理の証明を改良することで, 楕円的でないだけでなく弱劣楕円的でないことまで示された. 弱劣楕円性とは, (狭義の)楕円性と同様に恒等写像上のスプレーによって定義される岡性の十分条件であり, そのような楕円性の中で最も弱いものである.

系 24 ([22, Corollary 1.4])**.** 各 $n \geq 3$ に対し $\mathbb{C}^n \setminus ((\overline{\mathbb{N}^{-1}})^2 \times \{0\}^{n-2})$ は楕円的でない岡多様体である. ここで $\mathbb{N}^{-1} = \{j^{-1} : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$ である.

証明. $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} = \bigcup_{j=1}^n \mathbb{C}^{j-1} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n-j}$ であることと系8, 局所化原理(系21)より,

$$\mathbb{C}^n \setminus \left(\exp^{-1}\left(\mathbb{N}^{-1}\right) \times \overline{\mathbb{N}^{-1}} \times \{0\}^{n-2}\right)$$

が岡であることを示せば十分である. $S = \exp^{-1}(\mathbb{N}^{-1}) \times \overline{\mathbb{N}^{-1}} \times \{0\}^{n-2}$ とおく. 定理3を用いることで, 各 $y \in \mathbb{C}^n \setminus S$ に対して自己同型写像 $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}^n$ で次の条件を満たすものを構成できる(cf. [22]):

1. $\varphi(y) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*$.
2. $\varphi(S) \cap (\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*)$ は $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*$ に集積点をもたない.
3. $\mathrm{pr}_n(\varphi(S)) \cap \mathbb{C}^*$ は $\mathbb{C}^*$ に集積点をもたない(pr_n は第 n 成分への射影).

これから $\mathrm{pr}_n((\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n-1}} \times \exp)^{-1}(\varphi(S))) = \exp^{-1}(\mathrm{pr}_n(\varphi(S)))$ が離散点列であることが従い, Rosay–Rudin [32] の結果から離散点列 $(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n-1}} \times \exp)^{-1}(\varphi(S)) \subset \mathbb{C}^n$ が従順(例14(3))であることが分かる. よって例14(3)とGromovの岡の原理(定理16)から $\mathbb{C}^n \setminus (\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n-1}} \times \exp)^{-1}(\varphi(S))$ は岡であり, これを普遍被覆とする $(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*) \setminus \varphi(S)$ も岡である(系8). 従って $\varphi^{-1}(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*) \setminus S \subset \mathbb{C}^n \setminus S$ は岡であるような y のZariski開近傍であり, 再び局所化原理(系21)によって $\mathbb{C}^n \setminus S$ は岡である. □

実はこの後, 次のようにより単純な非楕円的岡多様体の例を発見することに成功した. この定理は系24を一般化していることにも注意する.

定理 25 ([25, Corollary 1.3])**.** コンパクト正則凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ に対して, $\mathbb{C}^n \setminus K$ は岡である. 特に $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n}$ $(n \geq 3)$ は非楕円的岡多様体である.

定理25は2001年にForstnerič–Prezelj [12] が提起した問題を肯定的に解決するものである. 証明では凸楕円性による岡多様体の特徴付け(定理20)は用いられるが, 局所化原理(系21)は用いられない. その代わりにAndersén–Lempert理論と呼ばれる多変数複素力学系的手法が重要な役割を果たしている.

5. おわりに: 双曲性との対比による予想と問題

前節で見たように, 岡性は条件 Ell_1 や凸楕円性などの楕円性と同値になるのであった(cf. 定理20). つまり厳密な意味で, 岡性は複素幾何学的に双曲性と真逆の性質を持つ. このことから, 他の幾何学においても岡多様体と双曲的な多様体は真逆の性質を持っていると予想できる. この最後の節では, そのような観点から岡多様体に関する予想と問題をいくつか述べる.

まず微分幾何学的には, 双曲性は次のように負曲率に対応している.

定理 26 (cf. [20, Theorem 3.7.1])**.** 負正則断面曲率をもつコンパクトHermite多様体は小林双曲的である.

このことから岡多様体は非負曲率計量と深い関係を持つと考えられる. 実際に, Mokの定理[29, Main Theorem]から非負正則双断面曲率をもつコンパクトKähler多様体は岡多様体であることが従う. 以上の事実から次を予想するのは自然であろう.

予想 27. 非負正則断面曲率をもつコンパクトKähler多様体は岡多様体である.

この予想は正則断面曲率が正の場合でも未解決である. Yang [36] によって解決されたYau予想により, そのような多様体は有理連結になる. また代数的な場合であれば, 松村の定理[28, Theorem 1.1]と系8を用いて予想27を有理連結な場合に帰着できる. これらのことから次が重要な問題となる.

問題 28. 任意の有理連結多様体は岡であるか.

より代数幾何学的な視点からは, ある双曲性が余接束がネフであることを導くというKratzの定理[21, Theorem 6]と関連して次が予想される.

予想 29. 接束がネフである任意のコンパクトKähler多様体は岡である.

射影的かつ次元が3以下の場合は, Campana–Peternellの結果 [4, Theorem 3.1 & Theorem 10.1] から予想29が正しいことが従う. 実は予想29も, Demailly–Peternell–Schneiderの定理[7]によって問題28に帰着することができる. また, Campana–Peternell予想[4, Conjecture 11.1]が正しいならば, 予想29も肯定的に解決されることに注意する.

代数幾何学的には, 双曲性は次のように一般型であるということに対応している.

予想 30 (cf. [35, Conjecture 1]). 射影多様体 Y に対して, Y が小林双曲的であることと Y 内の任意の閉部分多様体が一般型であることは同値である.

一般型と真逆の性質としてCampanaが導入した特殊型という概念があり (cf. [3]), 岡多様体と関連して次の定理が成り立つことが知られている.

定理 31 (cf. [3, Corollary 8.11]). 任意のコンパクトKähler岡多様体は特殊型である.

ここで自然と問題になるのが逆も成立するかどうかであり, 岡の原理と特殊型の関係を調べたCampana–Winkelmannの論文[5]でもそのことが問われた.

問題 32 (Campana–Winkelmann [5, Question 1.8]). 任意の特殊型コンパクトKähler多様体は岡であるか.

実は有理連結ならば特殊型であり (cf. [3, Theorem 3.22]), 問題32が肯定的に解決されれば, 問題28も肯定的に解決されることに注意する. また最後に, 一つの例も岡かどうか判別できていないK3曲面も特殊型であることを述べておく.

参考文献

[1] R. B. Andrist, N. Shcherbina, and E. F. Wold. The Hartogs extension theorem for holomorphic vector bundles and sprays. *Ark. Mat.*, 54(2):299–319, 2016.

[2] H. Behnke and K. Stein. Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. *Math. Ann.*, 120:430–461, 1949.

[3] F. Campana. Orbifolds, special varieties and classification theory. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 54(3):499–630, 2004.

[4] F. Campana and T. Peternell. Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective. *Math. Ann.*, 289(1):169–187, 1991.

[5] F. Campana and J. Winkelmann. On the h-principle and specialness for complex projective manifolds. *Algebr. Geom.*, 2(3):298–314, 2015.

[6] H. Cartan and P. Thullen. Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.*, 106(1):617–647, 1932.

[7] J.-P. Demailly, T. Peternell, and M. Schneider. Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles. *J. Algebraic Geom.*, 3(2):295–345, 1994.

[8] F. Forstnerič. Oka manifolds. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(17-18):1017–1020, 2009.

[9] F. Forstnerič. Oka manifolds: from Oka to Stein and back. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 22(4):747–809, 2013. With an appendix by Finnur Lárusson.

[10] F. Forstnerič. *Stein manifolds and holomorphic mappings (The homotopy principle in complex analysis)*, volume 56 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer, Cham, second edition, 2017.

[11] F. Forstnerič. Developments in Oka theory since 2017. arXiv:2006.07888.

[12] F. Forstnerič and J. Prezelj. Extending holomorphic sections from complex subvarieties. *Math. Z.*, 236(1):43–68, 2001.

[13] F. Forstnerič and T. Ritter. Oka properties of ball complements. *Math. Z.*, 277(1-2):325–338, 2014.

[14] H. Grauert. Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. *Math. Ann.*, 129:233–259, 1955.

[15] H. Grauert. Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Rämen. *Math. Ann.*, 133:139–159, 1957.

[16] H. Grauert. Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. *Math. Ann.*, 133:450–472, 1957.

[17] H. Grauert. Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. *Math. Ann.*, 135:263–273, 1958.

[18] M. Gromov. *Partial differential relations*, volume 9 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[19] M. Gromov. Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(4):851–897, 1989.

[20] S. Kobayashi. *Hyperbolic complex spaces*, volume 318 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[21] H. Kratz. Compact complex manifolds with numerically effective cotangent bundles. *Doc. Math.*, 2:183–193, 1997.

[22] Y. Kusakabe. Oka complements of countable sets and nonelliptic Oka manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 148(3):1233–1238, 2020.

[23] Y. Kusakabe. Elliptic characterization and localization of Oka manifolds. *Indiana Univ. Math. J.*, to appear.

[24] Y. Kusakabe. Elliptic characterization and unification of Oka maps. *Math. Z.*, to appear.

[25] Y. Kusakabe. Oka properties of complements of holomorphically convex sets. arXiv:2005.08247.

[26] F. Lárusson. Eight lectures on Oka manifolds. arXiv:1405.7212.

[27] F. Lárusson. Absolute neighbourhood retracts and spaces of holomorphic maps from Stein manifolds to Oka manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(3):1159–1167, 2015.

[28] S. Matsumura. On projective manifolds with semi-positive holomorphic sectional curvature. arXiv:1811.04182.

[29] N. Mok. The uniformization theorem for compact Kähler manifolds of nonnegative holomorphic bisectional curvature. *J. Differential Geom.*, 27(2):179–214, 1988.

[30] K. Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. III. Deuxième problème de Cousin. *J. Sci. Hiroshima Univ.*, 9:7–19, 1939.

[31] R. Remmert. Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 243:118–121, 1956.

[32] J.-P. Rosay and W. Rudin. Holomorphic maps from $\mathbf{C}^n$ to $\mathbf{C}^n$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 310(1):47–86, 1988.

[33] K. Stein. Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem. *Math. Ann.*, 123:201–222, 1951.

[34] J. Winkelmann. Tame discrete sets in algebraic groups. arXiv:1901.08952.

[35] K. Yamanoi. Kobayashi hyperbolicity and higher-dimensional Nevanlinna theory. In *Geometry and analysis on manifolds*, volume 308 of *Progr. Math.*, pages 209–273. Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

[36] X. Yang. RC-positivity, rational connectedness and Yau's conjecture. *Camb. J. Math.*, 6(2):183–212, 2018.