幾何学的岡理論

日下部　佑太　(九州大学)*

1　はじめに

本稿では, Gromov の楕円幾何学的視点から大きく発展した岡理論を, 解析接続との関係に注目しながら概観する. この理論は, 現代的岡理論 (Modern Oka Theory) と呼ばれることも多いが, その端緒は 1989 年の Gromov の論文 [14] にあり, いつまでも現代的と呼ぶにはやや時を経ている. そこで, Gromov の楕円幾何学が, 幾何学的関数論の一部をなす小林双曲幾何学と対極をなす幾何学であることに着想を得て, 本稿ではこの理論を**幾何学的岡理論** (Geometric Oka Theory) と仮に名付けることにする. 本稿で扱う, 岡多様体の楕円幾何学的条件による特徴付け, Gromov 問題の解決, およびそこから新たに見えてくる幾何学的側面を通して, この名が相応しいかどうかを読者に委ねたい.

2　正則関数の母なる大地

2.1　解析接続と Riemann 領域

古典的な岡理論について復習するために, まずは H. Weyl による『リーマン面 (田村二郎訳)』[27] に書かれた, Riemann 面についての言葉を引用しよう.

> それはまた, 経験により多かれ少なかれ技巧的に解析関数から蒸溜された何ものかではなく, あくまでもそれ以前のもの, 母なる大地, その上にこそはじめて諸関数が生育し繁茂しうる大地とみなされなければならない.　　— Hermann Weyl [27]

ここで言う「解析関数から蒸溜された何ものか」とは, 正則関数を解析接続して得られる, $\mathbb{C}$ 上に広がる Riemann 面のことだと考えられる. 岡理論は, $\mathbb{C}^n$ 上に広がった領域が, それ以上解析接続できないある正則関数の存在域となっているのはいつか, という問いを究極の目標とした理論である. 言い換えれば, 正則関数の母なる大地となる領域を特徴付け, その上にどのような正則関数が生育し繁茂しうるのかを調べる理論であると言える.

点 $z \in \mathbb{C}^n$ の近くで定義された正則関数の芽の解析接続とは, それを含む茎 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,z}$ を束ねた $\mathbb{C}^n$ 上の層 (étalé 空間)

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} = \bigsqcup_{z \in \mathbb{C}^n} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,z} \to \mathbb{C}^n, \quad [f]_z \mapsto z$$

の中で, その芽を含む領域 (連結開集合) を取ることと同じである. 一致の定理より $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ は Hausdorff 空間であり, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ には射影が正則となるような複素多様体の構造が一意的

* 〒819-0395 福岡市西区元岡 744　九州大学 大学院数理学研究院
e-mail: `kusakabe@math.kyushu-u.ac.jp`
web: `https://kusakabe.github.io/`

に定まる．これを一般化して, 次の概念が導入される．

定義 2.1. 連結複素多様体 Ω と, 複素多様体 X への局所双正則写像 $\pi : \Omega \to X$ の組 (Ω, π) を X 上の (不分岐) **Riemann 領域**という．

特に, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ の各連結成分 Ω は $\mathbb{C}^n$ 上の Riemann 領域となっており, 正則関数

$$\Omega \to \mathbb{C}, \quad [f]_z \mapsto f(z)$$

を, それ以上大きな Riemann 領域へ解析接続できないような最大の定義域となっている．このような Riemann 領域は**正則領域**と呼ばれ, 正則関数の母なる大地となるものである．

例 2.2. 任意の領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ は正則領域である．実際, Ω の全ての境界点を集積点にもつような離散点列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ に, Mittag-Leffler の定理と Weierstrass の定理から得られる補間定理を適用することで $f(a_n) = n$ $(n \in \mathbb{N})$ となるような $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ が得られる．これにより, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ の連結成分への $\mathbb{C}$ 上の双正則写像

$$\Omega \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto [f]_z$$

が得られる．

この例とは対照的に, 多変数では正則領域でない領域が存在する．それどころか, 全ての正則関数が一斉に, ある一つのより大きい領域に解析接続されてしまうことさえある．

例 2.3 (Hartogs 現象)**.** 開円板 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ と $q \geq 1$, $r \in]0, 1[$ を用いて定義される **q-Hartogs 図形**

$$H_q(r) = (\mathbb{D}^q \times r\mathbb{D}) \cup \left(\left(\mathbb{D}^q \setminus (1-r)\overline{\mathbb{D}^q}\right) \times \mathbb{D}\right) \subset \mathbb{D}^{q+1}$$

に対して, 正則関数の空間の間の制限写像 $\mathcal{O}(\mathbb{D}^{q+1}) \to \mathcal{O}(H_q(r))$ は全射である．なお, 多重円板 $\mathbb{D}^{q+1}$ は正則領域である．

この現象は, 上で述べた層の連結成分の議論を用いることで, 任意の Riemann 領域へと一般化できる．すなわち, $\mathbb{C}^n$ 上の Riemann 領域 (Ω, π) に対して, (Ω, π) から $\mathbb{C}^n$ 上の Riemann 領域 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\pi})$ への, ファイバーを保つ正則写像 $i : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ で

$$i^* : \mathcal{O}(\widetilde{\Omega}) \to \mathcal{O}(\Omega), \quad f \mapsto f \circ i$$

が全射となるもの全体のなす圏を考えると, その終対象が存在する．すなわち, Ω 上の全ての正則関数が解析接続される Riemann 領域のうち, 最大のものが存在する．この Riemann 領域は, (Ω, π) の**正則包**と呼ばれる．

正則領域がそうであるように, Riemann 領域 (Ω, π) が自分自身の正則包であると仮定しよう．このとき, $\mathbb{C}^n$ 内の Hartogs 図形から Ω への正則写像は, その正則包である $\mathbb{D}^n$ からの正則写像へと拡張されなければならない．この性質は, 正則包の **Hartogs 擬凸性**と呼ばれ, その逆を問う次の問題は, 1953 年に岡 [21] によって解決された．

問題 2.4 (Hartogs の逆問題, あるいは Levi 問題)**.** $\mathbb{C}^n$ 上の Riemann 領域に対し, Hartogs 擬凸ならば正則領域であるか.

2.2 Stein 多様体と Cartan–Oka–Weil の定理

$\mathbb{C}^n$ 上の正則領域が正則関数の母なる大地とみなされることは分かるが, その上にどのような正則関数が生育し繁茂しているのかという様子は, 定義からは見えてこない. 岡理論は, Hartogs の逆問題を含む多変数関数論の三大問題の解決へと導いたが, 残りの二つの問題である近似の問題と Cousin 問題の解決こそが, この問いに明確な解答を与える. Cousin 問題の解を一般化するために導入された Stein 多様体の定義から見ていこう.

定義 2.5. 複素多様体 X が **Stein 多様体**であるとは, 直積位相に関して写像

$$X \to \mathbb{C}^{\mathcal{O}(X)}, \quad x \mapsto (f(x))_{f \in \mathcal{O}(X)}$$

が単射かつ固有であることをいう.

これが単射であることの意味は理解しやすく, $\mathbb{C}^n$ 上の正則領域がこの性質を満たすことは, それ以上解析接続できない正則関数の偏導関数を全て考えることで確認できる. 一方で, 固有写像になるという性質は正則凸性と呼ばれ, 正則領域のある種の凸性を Hartogs 擬凸性とは異なる視点から捉えたものである. 複素多様体 X 内の任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して, その**正則凸包**

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(X)} = \bigcap_{f \in \mathcal{O}(X)} \left\{ x \in X : |f(x)| \leq \sup_K |f| \right\}$$

がコンパクトとなるとき, X は**正則凸**であると言われ, 上の写像の固有性と同値である.

$\mathbb{C}^n$ 内の領域が正則凸ならば正則領域であることは, 固有性による定義を用いることで, 例 2.2 と全く同様の議論によって示される. Cartan–Thullen [4] は, コンパクト集合 $K \subset \Omega$ の正則凸包と $\partial\Omega$ の距離に着目して, 逆も成り立つことを証明した. 従って, $\mathbb{C}^n$ 内の領域に対して, 正則領域であることと Stein であることは同値である. しかし次の定理は, 岡の結果以前には知られていなかった.

定理 2.6 (Oka [21])**.** $\mathbb{C}^n$ 上の Riemann 領域に対し, 正則領域であることと, Stein 多様体であることは同値である.

$\mathbb{C}^n$ 上の正則領域の正則接束は自明であるが, そのようなものとして実現できない Stein 多様体は, $\mathbb{C}^n$ の閉複素部分多様体を考えることで得られる. これで, Stein 多様体は正則領域より真に広いクラスであることが分かるが, そこではどのような正則関数が生育し繁茂しているのであろうか. この問いに答えるのが, 近似の問題および Cousin の第一・第二問題の解決であり, それらは Stein 多様体上に Runge の近似定理, Mittag-Leffler の定理, Weierstrass の定理が一般化されることを主張している.

まず, 近似定理は次の形で成立する. $K \subset X$ が**正則凸**であるとは, $\widehat{K}_{\mathcal{O}(X)} = K$ が成り立つことであり, Runge の近似定理における K の補集合の条件を表現したものである.

定理 2.7 (Oka–Weil の近似定理)**.** 任意の Stein 多様体 X 内のコンパクト正則凸集合 $K \subset X$ に対し, 制限写像 $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(K)$ の像は稠密である.

Cousin の問題の解はここでは述べられないため, 代わりに Mittag-Leffler の定理と Weierstrass の定理から得られる補間定理の一般化を見ておこう.

定理 2.8 (Oka–Cartan の拡張定理)**.** 任意の Stein 多様体 X 内の閉複素部分多様体 $Z \subset X$ に対し, 制限写像 $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Z)$ は全射である.

これらの定理が成り立つという事実だけで, Stein 多様体が正則関数の母なる大地であることは疑いようがない. さらに, Oka–Cartan の拡張定理は X の Stein 性と同値であることから, 逆に正則関数が生育し繁茂するための大地は Stein 多様体でなければならない. しかし, Liouville の定理を思い出すと, 正則写像 $\mathbb{C} \to \mathbb{D}$ は $\mathbb{C}$ が Stein であるにも関わらず定数しか存在しない. ここで, 正則関数 (写像) が繁茂するためには, 母なる大地だけでなく, 父なる天空となる正則写像の自然な値域も必要であることに気付かされる.

3 父なる天空を求めて

3.1 正則写像の解析接続

以下では, 母なる大地の上で, そのもとにこそはじめて正則写像が生育し繁茂しうるような値域の定義を模索していく. 正則関数の母なる大地を見いだしたときと同様に, まずは正則写像の解析接続を考えてみよう.

定義 3.1 (cf. [2])**.** 複素多様体 Y が **q-Hartogs 多様体**であるとは, 任意の $r \in]0,1[$ に対する q-Hartogs 図形 (例 2.3) $H_q(r) \subset \mathbb{D}^{q+1}$ に対して, 制限写像

$$\mathcal{O}(\mathbb{D}^{q+1}, Y) \to \mathcal{O}(H_q(r), Y)$$

が全射になることをいう. $q = 1$ のときは, 単に Hartogs 多様体と呼ぶ.

$\mathbb{C}^n$ の場合と同様に, Stein 多様体上の Riemann 領域は正則包を持つことが知られている [25]. Stein 多様体上の Hartogs の逆問題の解決 [5] を用いて, 次が確かめられる.

定理 3.2 (cf. [26, Lemma 5])**.** 複素多様体 Y が Hartogs であることと, 任意の Stein 多様体 X 上の Riemann 領域 Ω とその正則包 $\widetilde{\Omega}$ に対して, 誘導される射

$$\mathcal{O}(\widetilde{\Omega}, Y) \to \mathcal{O}(\Omega, Y)$$

が全射となることは同値である.

定義から任意の Stein 多様体は Hartogs であるが, 単位円板 $\mathbb{D}$ も Hartogs となってし

まい, 先述の通り, Hartogs 多様体を正則写像の父なる空と呼ぶことは到底できない. さらに, 射影直線 $\mathbb{P}^1$ は $\mathbb{C}$ を含むため, Stein 多様体からの正則写像を数多くもつが, 商写像

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^* = \mathbb{P}^1$$

が正則包 $\mathbb{C}^2$ へと拡張されないため Hartogs ではない. このことからも, Hartogs 性は Stein 多様体からの正則写像が繁茂する状況を捉えられていないことが分かる.

3.2 Cartan–Oka–Weil の定理と岡多様体

ここで, 母なる大地である Stein 多様体を特徴付けていた Oka–Cartan の定理 (定理 2.8) を思い出そう. 正則包への解析接続を公理化することで Hartogs 多様体が定義されたのと同様に, Oka–Cartan の定理を公理化することで, 次の概念が導入される.

定義 3.3. 複素多様体 Y が**岡多様体**であるとは, 任意の Stein 多様体 X 内の閉複素部分多様体 $Z \subset X$ に対して, 制限写像

$$\mathcal{O}(X, Y) \to \{f \in \mathcal{O}(Z, Y) : \exists F \in C^0(X, Y)\ F|_Z = f\}$$

が全射となることをいう.

ここで, f が連続写像 $F : X \to Y$ に拡張されることを仮定しているのは, 明らかに正則拡張できない場合を除外するためである. Hartogs 多様体の定理 3.2 ではそのような仮定が現れないが, 仮定を付け加えても同値であることはその定理が保証している. 同様に, 岡多様体も特別な組に対する拡張定理のみで特徴付けることができる.

定理 3.4 (Lárusson [20])**.** 複素多様体 Y が岡であることと, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と可縮な閉複素部分多様体 $Z \subset \mathbb{C}^n$ に対して, 制限写像

$$\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, Y) \to \mathcal{O}(Z, Y)$$

が全射になることは同値である.

Hartogs 多様体の場合と同じく, ここで岡多様体の例として Stein 多様体のような広いクラスを挙げたいところである. しかし現時点では, Oka–Cartan の定理から従う $\mathbb{C}$ とその直積 $\mathbb{C}^n$, および Lárusson の特徴付けから得られる次の例しか挙げられない.

例 3.5. 任意の可換複素 Lie 群 G が岡であることを確かめる. G の指数写像

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$

は G の普遍被覆を与える. 可縮な閉複素部分多様体 $Z \subset \mathbb{C}^n$ からの正則写像 $f \in \mathcal{O}(Z, G)$ を取ると, Z の可縮性より, 正則写像 $\tilde{f} \in \mathcal{O}(Z, \mathfrak{g})$ で $\exp \circ \tilde{f} = f$ となるものが存在する. ここで $\mathfrak{g} \cong \mathbb{C}^{\dim G}$ が岡多様体であることを用いれば, $\tilde{f}$ は $\widetilde{F} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, \mathfrak{g})$ に拡張でき, f の拡張 $\exp \circ \widetilde{F} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, G)$ が得られる.

以上では, Oka–Cartan の定理を公理化することで岡多様体の定義を得たが, Oka–Weil の近似定理を公理化するとどうなるかも気になるところである．実はこれも岡多様体を特徴付けており, さらにジェット拡張定理と組み合わせ, パラメータを付加した形でも同値となることが知られている (Forstnerič の定理 [6, 7])．Oka–Cartan の拡張定理および Oka–Weil の近似定理の成立によって特徴付けられるのであるから, 岡多様体が正則写像の父なる天空であることは認めざるを得ない．この父なる天空のもとでは, 定義から, 同一の連結成分に属する任意の二点を整曲線, すなわち $\mathbb{C}$ からの正則写像で結ぶことができる．これは有理連結性の解析的類似であり, また単有理性の解析的類似として, 任意の点がある $\mathbb{C}^n$ からの正則写像の臨界値でない点として実現できることも近似定理から従う．次の目標は, 一つでも多くの新たな岡多様体を見つけることであり, この単有理性の解析的類似を手掛かりとして, 岡多様体の幾何学的十分条件が得られるのである．

3.3 Gromov の楕円幾何学

前節では, 岡多様体の例として可換複素 Lie 群しか挙げることができなかった．一般に, 与えられた複素多様体の岡性を直接確かめることは, 正則写像の拡張定理や近似定理を証明することと同義であり, 至難の業である．そこで登場するのが, 岡であるための幾何学的十分条件を与える Gromov の楕円性である．Gromov の楕円性は, $\mathbb{C}^n$ からの正則写像がある意味で豊富に存在するという点で, 小林双曲性とは真逆の性質である．この性質を定義するために, $\mathbb{C}^n$ からの正則写像の正則族である正則スプレーの概念が必要となる．

定義 3.6. $f : X \to Y$ を複素多様体の間の正則写像とする．

(1) 図式

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "s"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

もしくは単に $s : E \to Y$ が $f : X \to Y$ 上の**正則スプレー**であるとは, $p : E \to X$ が正則ベクトル束, $s : E \to Y$ が正則写像であり, 次の図式を可換にすることをいう:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr, "s"] & \\ X \arrow[ur, "0_E"] \arrow[rr, "f"] & & Y. \end{tikzcd}$$

正則写像 f が X の恒等写像 $\mathrm{id}_X : X \to X$ の場合は, X 上の正則スプレーと呼ぶ．

(2) 正則スプレー $X \overset{p}{\leftarrow} E \overset{s}{\to} Y$ が**支配的**であるとは, 正則写像 $(p, s) : E \to X \times Y$ の臨界点集合が, E の零切断と交わらないことをいう．

つまり, 単有理性の解析的類似に正則パラメータを付加したものが, 支配的正則スプレーである．このような対象の存在を用いて, 以下の二つの楕円性が定義される．

定義 3.7. Y を複素多様体とする.

(1) Y が**楕円的**であるとは, Y 上の支配的正則スプレーが存在することをいう.
(2) Y が**相対楕円的**[*1] であるとは, 任意の Stein 多様体 X からの正則写像 $f : X \to Y$ に対して, f 上の支配的正則スプレーが存在することをいう.

正則ベクトル束の引き戻しを考えることで, 楕円的ならば相対楕円的であることは直ちに従う. また, 定義より相対楕円的 Stein 多様体は楕円的である. 楕円性は, 具体的に一つの支配的正則スプレーを構成するだけで確認できるため, 岡性を直接確かめる場合に比べて, はるかに容易い. 岡性がこの楕円性から従うというのが, Gromov の主定理である.

定理 3.8 (Gromov [14])**.** 任意の楕円的多様体は岡である.

この定理の証明のアイデアを簡潔に述べると, 例 3.5 における指数写像のように支配的正則スプレーを用いることにより, 示すべき近似定理を線形化し, 古典的な岡理論を適用するというものである. この例で確認した可換複素 Lie 群の岡性は, 以下の支配的正則スプレーの簡単な構成からも確かめることができる.

例 3.9. 複素多様体 Y が複素等質である, すなわちある複素 Lie 群 G からの正則かつ推移的な作用 $G \curvearrowright Y$ をもつとする. このとき,

$$s : Y \times \mathfrak{g} \to Y, \quad s(y, X) = \exp(X) \cdot y$$

は Y 上の支配的正則スプレーであり, 従って Y は楕円的である.

次に考えるべき問題は, Gromov の定理 3.8 の逆が成り立つかを問う, Gromov 問題 [14, Question 3.2.A"] である. ジェットに関する Oka–Cartan の拡張定理を用いることで, 岡性から相対楕円性が従うことは容易に確かめることができる. この逆が成り立つかというのも自然な問題であり, Gromov の演習問題 [13, p. 72] が予想 [14, 1.4.E"] に昇格したものであるが, これについては筆者によって次のように肯定的に解決された.

定理 3.10 ([16])**.** 複素多様体に対して, 岡性と相対楕円性は同値である.

この定理の証明は, Forstnerič の定理 [6, 7] と Gromov の定理 3.8 の証明を組み合わせ, 正則写像の貼り合わせの段階である工夫を施すことにより与えられる (cf. [17]). この特徴付けの応用範囲は広く, 上記の Gromov 問題もその一つとして, 否定的に解決された. 詳細については次節以降に譲り, ここでは次の局所化定理と呼ばれる系を紹介しておく.

系 3.11 ([16])**.** Zariski 位相に関する岡開集合で被覆される複素多様体は岡である.

[*1] Gromov が Ell_1 という名で導入した条件である. 最近まで Ell_1 と呼ばれてきたが, 筆者と Lárusson との議論を経て, Forstnerič の ICM 2026 の予稿 [8] で相対楕円性 (relative ellipticity) の名が与えられた.

一方で, 楕円性についての同様の主張は, 成立しないことが最近になって明らかになった [19]. 楕円性が過度に強い条件である理由は, 相対楕円性とは異なり, 任意の複素多様体からの正則写像の上に支配的スプレーの存在を要求している点にある. 以上を踏まえると, 楕円的多様体は具体的に確かめやすいという利点をもつものの, 母なる大地である Stein 多様体からの正則写像の天空の父としては, 岡多様体の方がより相応しいであろう.

4 岡多様体のもとに広がる風景

4.1 岡性と擬凹性

正則写像の父なる天空として, 初めに Hartogs 多様体を候補に挙げたが, Liouville の定理によりそれは失敗に終わった. そこで, 一見するとより強力に見える Oka–Cartan の拡張定理を公理化することにより岡多様体が導入されたが, 果たして岡多様体は Hartogs 多様体であろうか. 典型例である複素 Lie 群は, Hartogs であることが知られている.

定理 4.1 (Adachi–Suzuki–Yoshida [1])**.** 任意の複素 Lie 群は Hartogs 多様体である.

しかし, この問いは次の例によって否定的に解決される.

例 4.2 (Gromov [14])**.** 余次元が 2 以上の任意の閉代数的集合 $Z \subset \mathbb{C}^n$ に対し, その補集合 $\mathbb{C}^n \setminus Z$ は楕円的であり, 特に岡多様体であることが知られている. 支配的正則スプレーは, $\mathbb{C}^n$ 上の完備代数的ベクトル場で Z で消えるもののフローを用いて構成される.

従って, 父なる天空である岡多様体をもってしても, 母なる大地の上においてさえ, 正則写像が上手く生育しない場合がある. これは, 植えられた土地の地形が凹んでいて十分に陽が届かなければ, いかに大地と天空とが豊かであっても, 正則関数の生育が妨げられるということである. 上の例は特殊なものではなく, むしろ岡多様体の本質をよく捉えた例である. これに関連して, Forstnerič–Ritter [12] により, 次の事実が観察された.

定理 4.3 (Forstnerič–Ritter [12])**.** $\Omega \subset Y$ を n 次元複素多様体 Y 内の滑らかな境界を持つ岡領域とする. このとき, $\partial\Omega$ の各点に対して, ある開近傍 $U \subset Y$ が存在して $U \setminus \overline{\Omega}$ は $(n-1)$-Hartogs となる.

つまり, 岡領域はある意味で擬凹性を持つということである. 逆に, 何らかの擬凹性から岡性が導かれる場合もあるのではないかと考えるのは自然であり, その文脈において長らく未解決であったのが次の問題である.

問題 4.4 (Forstnerič–Prezelj [11])**.** $n > 1$ のとき, 単位閉球

$$\overline{\mathbb{B}^n} = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| \leq 1\}$$

の補集合 $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n}$ は岡多様体であるか.

$n = 1$ の場合には小林双曲的であり, $\mathbb{C}$ からの正則写像は定数しか存在しないが, $n > 1$

の場合には状況は一変する. この事実を示したのが Rosay–Rudin [24, Theorem 8.5] であり, $n>1$ のとき $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n}$ が次に定義する Fatou–Bieberbach 領域によって被覆されることが知られている.

定義 4.5. $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ が **Fatou–Bieberbach 領域**であるとは, $\Omega \neq \mathbb{C}^n$ であるが, Ω が $\mathbb{C}^n$ と双正則同値であることをいう.

Riemann の写像定理と Liouville の定理から, $\mathbb{C}$ 内には Fatou–Bieberbach 領域は存在しない. しかし, $n>1$ の場合には $\mathbb{C}^n$ 内に Fatou–Bieberbach 領域が存在し, これは正則自己同型群 $\operatorname{Aut}\mathbb{C}^n$ が極めて大きいことに起因している. 典型的な Fatou–Bieberbach 領域の構成法は, $\phi \in \operatorname{Aut}\mathbb{C}^n$ で $\phi(0)=0$ かつ原点における Jacobi 行列の固有値の大きさが全て 1 未満であるものに対し, その吸引鉢

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \lim_{k\to\infty} \phi^{\circ k}(z) = 0 \right\}$$

を考えるというものである. これを非自励的, すなわち k 回目の作用が ϕ_k と k に依存するような場合に拡張し, K を遠くに飛ばす, もしくはあまり動かさないようにすることで, $\mathbb{C}^n \setminus K$ 内の Fatou–Bieberbach 領域が得られる. このような Fatou–Bieberbach 領域を正則写像の値に正則に依存する形で構成することにより, 支配的正則スプレーが得られるというアイデアを用いて, Gromov 予想 (定理 3.10) の応用として Forstnerič–Prezelj 問題を解決したのが次の定理である.

定理 4.6 ([18, Corollary 1.3])**.** 任意のコンパクト正則凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ $(n>1)$ に対し, 補集合 $\mathbb{C}^n \setminus K$ は岡領域である.

岡は, 最後の公表論文 [22] において, 次のような言葉を残している.

> 現在の数学の進展には抽象化の傾向がある. 我々の研究分野においてさえも, 定理はどんどんと一般化され, そのあるものは複素変数の空間を出はずれている. 私には, それは冬であると感じられる. 私は長い間, 春の巡りを待ちかねており, 何か春を感じさせるような研究をしたいものだと思ってきた. この論文はそのようなものの最初の一つである.
> — 岡 潔 [22] (cf. [23])

岡多様体の Oka–Cartan の拡張定理による定義は抽象的であり, ここでいう冬を感じさせるものである. 一方, Forstnerič–Prezelj 問題は極めて具体的な問いであり, 岡領域

$$\mathbb{C}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n} = \{ z \in \mathbb{C}^n : \|z\| > 1 \} \quad (n>1)$$

のもとには, Fatou–Bieberbach 領域という花が咲き乱れ, 春の巡りを感じさせる. ここで得られた結果は, Forstnerič との共著論文 [9] において, 岡性と擬凹性のさらなる関係を明らかにするためにも応用されている.

4.2 楕円性と擬凸性

最後に, 上の定理が「任意の岡多様体が楕円的であるか」という Gromov 問題に反例を与えることを見る. そのためには, $\mathbb{C}^n$ 内の正則凸集合の補集合であって楕円的でないものを見つければ十分であり, これには Andrist–Shcherbina–Wold [3] による次の定理を用いることができる.

定理 4.7 (Andrist–Shcherbina–Wold [3])**.** 任意の Stein 多様体 Y 内のコンパクト正則凸集合 $K \subset Y$ に対し, $\dim Y \geq 3$ かつ K の導集合が無限集合ならば, 補集合 $Y \setminus K$ は楕円的でない.

この定理は, $Y \setminus K$ 上に支配的正則スプレーが存在すると仮定すると, それが Y のほとんど至るところまで支配的正則スプレーとして拡張され, ∂K の点における支配性を考えると矛盾が生じる, という流れで示される. 最近になって, Andrist–Shcherbina–Wold の結果は,「楕円性がある種の擬凸性を導く」ことの帰結だということが明らかになってきている. すなわち, 例え凹んだ場所に植えられた正則関数であっても, 楕円的な天空を備えていれば, 十分に陽が届くようになり, 母なる大地の上で生育するということである.

定理 4.8 ([19])**.** $\Omega \subset Y$ を複素多様体 Y 内の楕円的領域とする. このとき, 領域 $\Omega_0 \subset$ と閉解析的集合 $Z \subset \Omega_0$ で $\Omega = \Omega_0 \setminus Z$ となるものが存在し, $\partial\Omega_0$ の各点に対して, ある開近傍 $U \subset Y$ が存在して $U \cap \Omega_0$ は 2-Hartogs となる.

この定理より, 任意のコンパクト正則凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geq 3)$ に対し, K が無限集合であれば $\mathbb{C}^n \setminus K$ は非楕円的岡多様体となり, Gromov 問題に対する反例が豊富に得られる. さらに, 上と同様の手法を用いることで, 高次元 Hopf 多様体の爆発が非楕円的岡多様体であることも確かめられる [15, 19]. 一方で, 射影的岡多様体が楕円的であることが, 近年 Forstnerič–Lárusson [8] によって証明されたことにも注意しておく.

Adachi–Suzuki–Yoshida [1] の定理 (定理 4.1) を一般化して, 次の擬凸性も得られる.

定理 4.9 ([19])**.** 複素多様体 Y 上の支配的正則スプレー $s : E \to Y$ と $q \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\operatorname{rank} E - \dim Y < q$$

が成り立つならば, Y は q-Hartogs である.

岡多様体は, 非常に抽象的な公理により定義され, 当初は具体例を与えることも難しく, またその擬凹性のために正則写像が解析接続されず生育しないという, いわば冬であると言わざるを得ない状況にあった. しかし, 楕円性を導入することによって具体例が豊富に生み出され, さらに擬凸性によって正則写像も生育しうるようになり, 春を感じさせるようになった. この様子に驚くほど合致している岡の名句を, 最後に紹介したい.

冬枯れの　野に萌え出でよ　若緑　　　— 岡 潔 [23]

参考文献

[1] Adachi, K., Suzuki, M., Yoshida, M.: Continuation of holomorphic mappings, with values in a complex Lie group. Pacific J. Math. 47, 1–4 (1973).

[2] Anakkar, M., Ivashkovich, S.: Loop spaces as Hilbert–Hartogs manifolds. Arch. Math. (Basel). 115, 445–456 (2020).

[3] Andrist, R.B., Shcherbina, N., Wold, E.F.: The Hartogs extension theorem for holomorphic vector bundles and sprays. Ark. Mat. 54, 299–319 (2016).

[4] Cartan, H., Thullen, P.: Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Math. Ann. 106, 617–647 (1932).

[5] Docquier, F., Grauert, H.: Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 140, 94–123 (1960).

[6] Forstnerič, F.: Runge approximation on convex sets implies the Oka property. Ann. of Math. (2). 163, 689–707 (2006).

[7] Forstnerič, F.: Oka manifolds. C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 347, 1017–1020 (2009).

[8] Forstnerič, F.: From Stein manifolds to Oka manifolds: the h-principle in complex analysis. arXiv e-prints (2025). `https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.21197`

[9] Forstnerič, F., Kusakabe, Y.: Oka tubes in holomorphic line bundles. Math. Ann. 391, 5265–5292 (2025).

[10] Forstnerič, F., Lárusson, F.: Every projective Oka manifold is elliptic. arXiv e-prints (2025). `https://doi.org/10.48550/arXiv.2502.20028`

[11] Forstnerič, F., Prezelj, J.: Extending holomorphic sections from complex subvarieties. Math. Z. 236, 43–68 (2001).

[12] Forstnerič, F., Ritter, T.: Oka properties of ball complements. Math. Z. 277, 325–338 (2014).

[13] Gromov, M.: Partial differential relations. Springer-Verlag, Berlin (1986).

[14] Gromov, M.: Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles. J. Amer. Math. Soc. 2, 851–897 (1989).

[15] Kusakabe, Y.: Oka complements of countable sets and nonelliptic Oka manifolds. Proc. Amer. Math. Soc. 148, 1233–1238 (2020).

[16] Kusakabe, Y.: Elliptic characterization and localization of Oka manifolds. Indiana Univ. Math. J. 70, 1039–1054 (2021).

[17] Kusakabe, Y.: Elliptic characterization and unification of Oka maps. Math. Z. 298, 1735–1750 (2021).

[18] Kusakabe, Y.: Oka properties of complements of holomorphically convex sets. Ann. of Math. (2). 199, 899–917 (2024).

[19] Kusakabe, Y.: On pseudoconvexity of Gromov elliptic manifolds. (in preparation).

[20] Lárusson, F.: Mapping cylinders and the Oka principle. Indiana Univ. Math. J. 54, 1145–1159 (2005).

[21] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intérieur. Jpn. J. Math. 23, 97–155 (1953).

[22] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. X. Une mode nouvelle

engendrant les domaines pseudo-convexes. Jpn. J. Math. 32, 1–12 (1962).

[23] 奈良女子大学学術情報センター: 岡潔文庫. https://www.nara-wu.ac.jp/aic/gdb/nwugdb/oka/

[24] Rosay, J.-P., Rudin, W.: Holomorphic maps from $\mathbf{C}^n$ to $\mathbf{C}^n$. Trans. Amer. Math. Soc. 310, 47–86 (1988).

[25] Rossi, H.: On envelopes of holomorphy. Comm. Pure Appl. Math. 16, 9–17 (1963).

[26] Shiffman, B.: Extension of holomorphic maps into hermitian manifolds. Math. Ann. 194, 249–258 (1971).

[27] H. Weyl: リーマン面 (田村二郎訳). 岩波書店 (1974).